

la formación y el número de dedos, incluidos los mecanismos que llevaron a la pentadactilia durante la evolución. Con este objetivo hemos trabajado con el gen *Gli3*, una de las causas principales de polidactilia en humanos y en ratones, y con algunos genes de los complejos *Hoxd* y *Hoxa*, que se expresan en la paleta digital y controlan la morfogénesis de los dedos.

Al generar en el laboratorio combinaciones de dobles y triples mutantes de esos genes, hemos descubierto que el número de dedos aumenta a medida que se reduce la cantidad de genes *Hox* en ausencia de *Gli3*. Por otro lado, la polidactilia del mutante de *Gli3* se correlaciona con un mayor tamaño de la paleta digital; es decir, en ausencia del gen *Gli3* se forma una paleta digital más grande y, al haber más tejido, surgen más dedos, aunque ligeramente más delgados. Sin embargo, al disminuir la dosis de genes *Hox*, en ausencia del gen *Gli3*, el tamaño de la paleta digital no aumenta, sino

que en el mismo espacio se desarrollan más dedos. Los dedos que se forman en estos triples mutantes son mucho más delgados y están más próximos entre sí. Estos fenotipos de dedos delgados pero regularmente ordenados pueden interpretarse como el resultado de cambios en la longitud de onda de un patrón repetitivo generado por un modelo de tipo Turing. Se trata de los fenotipos que faltaban por descubrir y que se considera que apoyan este mecanismo. En realidad, nuestros fenotipos de dedos delgados y densamente empaquetados resultan muy difíciles de explicar con un modelo de gradiente de morfógeno.

Además, el análisis cuantitativo de los fenotipos y su resolución computacional con un modelo de reacción-difusión reproduce asombrosamente bien los fenotipos de nuestros mutantes. Por tanto, estos resultados, que publicamos en *Science* en diciembre de 2012, demuestran que un mecanismo de reacción-difusión de tipo

Turing controla el patrón de los dedos y que los genes *Hox* son los principales moduladores de la longitud de onda, es decir, del grosor de los dedos. Queda pendiente por descubrir la identidad de las moléculas principales, el activador y el inhibidor, un tema en el que estamos investigando con especial énfasis.

Nuestros resultados también tienen implicaciones evolutivas, ya que el patrón de dedos de los ratones mutantes estudiados se asemeja en gran medida al del endoesqueleto de las aletas de los peces. Ello sugiere que un mecanismo de tipo Turing, que se ha conservado en la evolución, se hallaba ya operativo antes del desarrollo de los peces cartilagosos.

—M.^a Félix Bastida, Marisa Junco
y Marián Ros
Instituto de Biomedicina y Biotecnología
de Cantabria (IBBTEC)
CSIC-SODERCAN-Universidad
de Cantabria

COMPLEJIDAD

De los universos digitales a la mente

Nuevas herramientas para cuantificar nuestra intuición sobre la complejidad y el azar

Considere las siguientes cadenas binarias: 010101010101 y 101101001110. ¿Cuál de ellas le parece más compleja? Muchos diríamos que la segunda, ya que la primera sigue una pauta regular que podríamos describir como «seis repeticiones de 01». En la segunda, en cambio, no resultará tan sencillo identificar un patrón simple para describirla. Si el lector coincide con estas observaciones, entonces maneja una noción intuitiva de complejidad. Pero ¿es posible cuantificarla?

La teoría algorítmica de la información nos ofrece una respuesta. La complejidad de Kolmogórov de un objeto (también conocida como complejidad de Kolmogórov-Chaitin, o complejidad algorítmica) se define como la longitud, en bits, del programa informático más corto que lo produce. Un programa es una secuencia de instrucciones ejecutables por una computadora, algo no muy distinto de una orden como «repita seis veces 01». Pero ¿cuáles son los programas más cortos que generan 010101010101 y 101101001110, respectivamente?

En cierto modo, la longitud del programa más corto dependerá del lenguaje de

programación que elijamos. Al igual que «repita seis veces 01» posee 20 caracteres en castellano pero no así en otros idiomas, algo parecido sucede con los programas informáticos. Sin embargo, ello no plantea grandes problemas, ya que puede demostrarse que las diferencias de longitud debidas al lenguaje de programación se hallan acotadas por una constante. El verdadero inconveniente con el que nos topamos es el de la incomputabilidad: no existe ningún procedimiento sistemático que permita encontrar cuál es el programa más corto que genera una cadena numérica dada.

A pesar de ser incomputable, la complejidad de Kolmogórov proporciona una noción tan poderosa y con tantas aplicaciones que merece la pena buscar un método para aproximarla. Lo más habitual suele ser emplear algoritmos de compresión sin pérdida de datos, como los programas que usamos para reducir el tamaño de una imagen digital sin que disminuya su calidad. El fichero comprimido puede interpretarse como un programa que, al ser ejecutado en una computadora, genera cierto objeto (la imagen). De esta manera, cuanto más logremos

comprimir un fichero, más baja será su complejidad.

Pero la compresión presenta sus propios problemas. Uno de ellos es que no puede usarse con cadenas pequeñas, ya que, al comprimirlas, el resultado suele ser un fichero de mayor tamaño que el de partida (debido a que los programas comprimidos siempre incluyen ciertas estructuras de datos, cabeceras, etcétera). ¿Cómo medir entonces la complejidad de secuencias como 010101010101 y 101101001110?

Máquinas de Turing

En 2012, uno de nosotros (Zenil) y Jean-Paul Delahaye, de la Universidad de Lille, propusimos en *Applied Mathematics and Computation* un método alternativo a la compresión para aproximar la complejidad de cadenas binarias de poca longitud. Dicho método se basa en explorar un conjunto de programas pequeños y muy simples: las máquinas de Turing. Propuestas en los años treinta por el matemático británico Alan Turing, tales programas constituyen una versión idealizada de los rudimentos básicos que permiten a un ordenador llevar a cabo cualquier

cálculo practicable en un número finito de pasos. En el caso que nos ocupa, se trata de ejecutar todas las máquinas de Turing que posean entre 2 y 5 estados internos, además del de detención.

El conjunto formado por dichas máquinas de Turing resulta mucho más interesante de lo que podría parecer a primera vista. En primer lugar, porque las máquinas de Turing poseen un poder computacional enorme: aunque puedan llegar a resultar muy lentas, son capaces de realizar los mismos cálculos que cualquier supercomputadora. Además, generan una enorme cantidad de posibilidades: si consideramos máquinas de Turing con tan solo tres estados (además del de detención), existen 7.529.536 máquinas; con cuatro estados, 11.019.960.576, y con cinco, 26.559.922.791.424.

Gracias a los recursos del Centro Informático Científico de Andalucía, hemos logrado ejecutar todas las máquinas de Turing de hasta cinco estados y almacenar la salida que generan (por motivos prácticos, nos limitamos a aquellas que se detienen en menos de 500 pasos, lo cual comprende la práctica totalidad de las máquinas que se paran). Gracias a ello podemos conocer la frecuencia con la que, en este universo tan peculiar de programas informáticos, se obtienen distintas cadenas binarias. Así, entre las máquinas con cinco estados que se detienen, una proporción de 6465/862.157.986.084 de ellas producen el resultado 0101010101;

en cambio, solo un 69/862.157.986.084 genera la cadena 101101001110. (En www.demonstrations.wolfram.com/InfiniteMonkeyTheorem ofrecemos una demostración interactiva de cómo algunas cadenas binarias son más probables que otras como resultado de un programa informático escogido al azar.)

¿Cómo obtener a partir de ahí la complejidad de cada secuencia? El teorema de codificación nos dice que la complejidad de Kolmogórov puede aproximarse por el logaritmo en base 2 de las frecuencias respectivas (cambiando, por supuesto, el signo del resultado). De esta manera, la complejidad de 0101010101 resulta ser 26,99, y la de 101101001110, notablemente mayor: 33,54. ¡La teoría y la experimentación computacional confirman nuestra noción intuitiva de complejidad!

Los resultados que acabamos de exponer pueden consultarse en *The Online Algorithmic Complexity Calculator* (www.complexitycalculator.com), un proyecto en línea que permite consultar la complejidad no solo de pequeñas cadenas binarias, sino también de otros tipos. En biología, por ejemplo, resultan útiles las distribuciones obtenidas a partir de máquinas de Turing que emplean cuatro símbolos para analizar la complejidad de las secuencias de ADN. (Un resumen so-

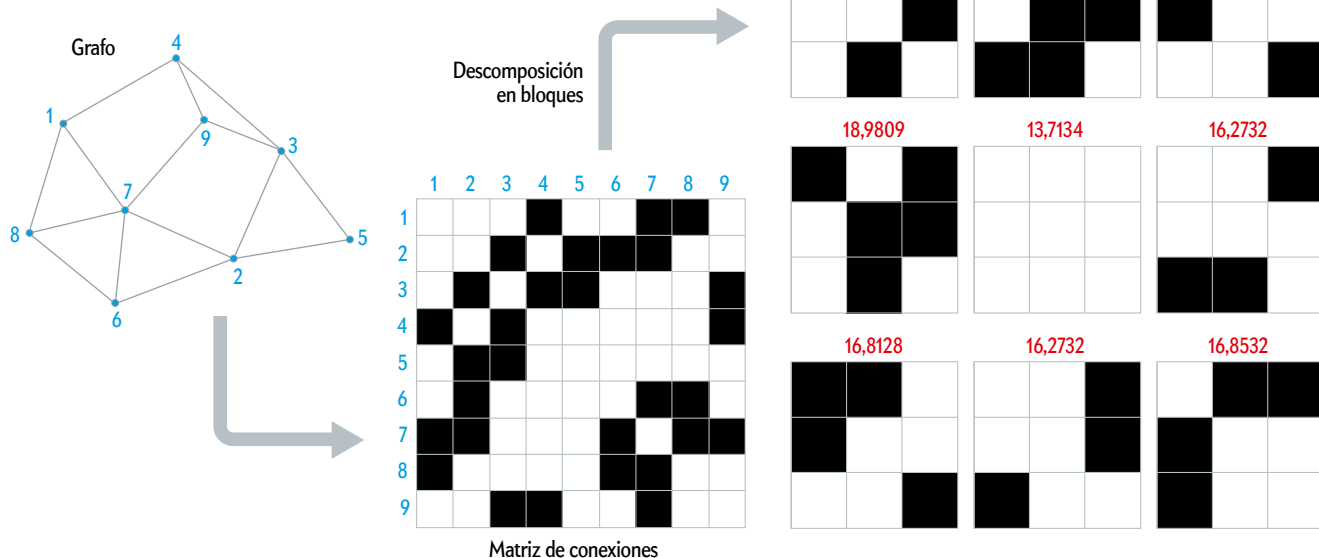
bre los fundamentos de este nuevo campo de investigación aparecerá próximamente en un artículo escrito junto con Delahaye y Nicolas Gauvrit, de la Universidad de París VII, en la revista *Computability*.)

Imágenes bidimensionales

Otros objetos, como las fotografías digitales, poseen una estructura que queda mejor representada en una cuadrícula bidimensional. A fin de cuantificar su complejidad, hemos generalizado el método anterior mediante el empleo de máquinas de Turing de dos dimensiones: aquellas que, en lugar de ejecutarse sobre una cinta, lo hacen sobre un plano dividido en celdas.

Dicho procedimiento permite generar matrices bidimensionales binarias (es decir, imágenes digitales en dos dimensiones) mediante programas informáticos de poca longitud. A partir de ahí, junto con Delahaye y Gauvrit, hemos desarrollado un método de descomposición en bloques que aproxima la complejidad de Kolmogórov de una matriz mediante su división en cuadrados formados por un número reducido de celdas.

Nuestro método permite clasificar la complejidad de pequeñas imágenes de una manera más precisa que la comprensión. También puede aplicarse al estudio



GRAFOS Y COMPLEJIDAD: A todo grafo puede asociarse una matriz binaria; aquella cuyos elementos c_{ij} valen 1 (negro) si los nodos i y j están conectados, y 0 (blanco) en caso contrario. Al descomponerla en bloques simples (derecha), la complejidad de cada uno de ellos (rojo) puede calcularse a partir de

la frecuencia con la que cada bloque es generado por un conjunto de máquinas de Turing bidimensionales. Esta definición cuantitativa de complejidad refleja algunos de los aspectos más intuitivos de dicho concepto (por ejemplo, la complejidad de un grafo es mayor cuanto menos simetrías posee).

de la complejidad de grafos, o redes, lo que promete aplicaciones de gran interés. Un conjunto de amigos, por ejemplo, puede entenderse como una red social en la que los nodos son las personas, y los enlaces, sus relaciones de amistad. La matriz de conexiones de dicho grafo (aquella en la que el elemento c_{ij} vale 1 cuando los nodos i y j están enlazados, y 0 en caso contrario) es una matriz binaria a la que se puede aplicar el método de descomposición en bloques.

Dicha noción de complejidad muestra propiedades de gran interés que también parecen corroborar nuestra intuición: por ejemplo, cuanto más simétrico es un grafo, más baja resulta su complejidad. Además, este método puede implementarse de manera eficiente, por lo que su tiempo de ejecución compite con el de los mejores algoritmos de compresión.

¿Qué complejidad genera la mente humana?

Si pedimos a una persona que escriba una secuencia binaria aleatoria, lo más fácil será que el resultado no se asemeje a 010101010101. Pero ¿se parecerá a 101101001110, el cual ha sido obtenido mediante un generador de números aleatorios?

Existen numerosas conjeturas sobre el tipo de aleatoriedad que produce la mente humana. Sin embargo, ninguna de ellas ha podido estudiarse con las herramientas de la teoría algorítmica de la información, debido en parte a la dificultad de trabajar con cadenas pequeñas mediante algoritmos de compresión. La mayoría de los estudios psicológicos que abordan este problema desarrollan medidas de complejidad *ad hoc*, las cuales carecen de la universalidad de la complejidad de Kolmogórov.

En nuestro grupo de investigación (www.algorithmicnature.org) hemos iniciado un proyecto colaborativo que pretende estudiar la capacidad de la mente humana para generar secuencias aleatorias. Animamos al lector interesado a acudir a la página web www.complexitycalculator.com/hrng y tomar parte mediante un sencillo test de menos de cinco minutos de duración. Con gusto informaremos a los participantes de los resultados. Esperamos que las técnicas que estamos desarrollando arrojen luz sobre el tipo de aleatoriedad que genera la mente humana.

—Fernando Soler Toscano
Universidad de Sevilla
—Héctor Zenil
Instituto Karolinska
Estocolmo

ECOLOGÍA

Fontanería forestal aplicada

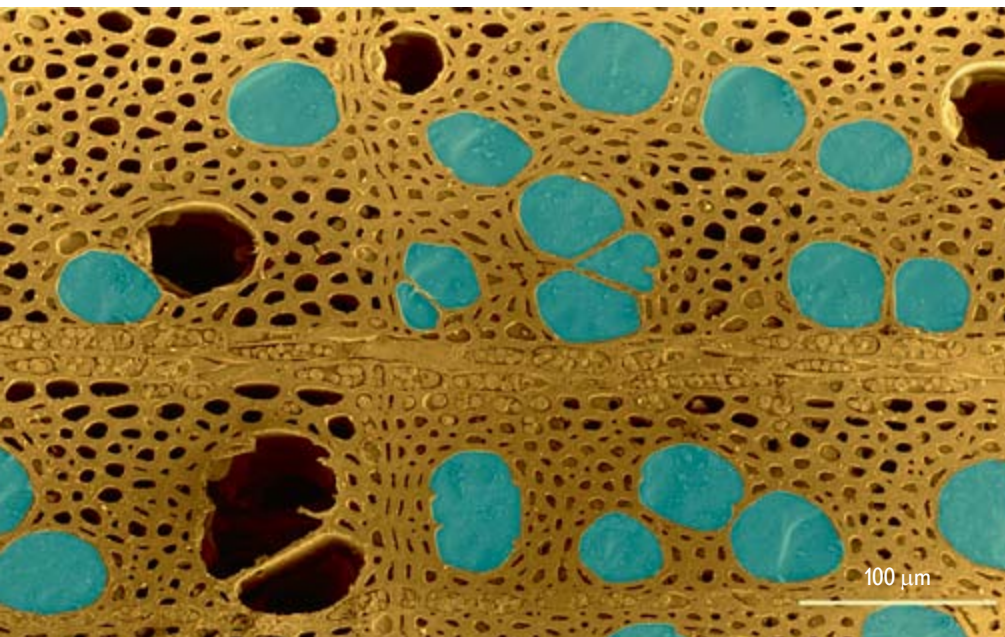
A pesar de las diferencias en su sistema vascular, los árboles de distintas zonas climáticas sufren un riesgo equiparable de sucumbir ante las sequías

Cuando miramos el tronco de un árbol nos cuesta imaginar que en la madera de su interior se esconde un complejísimo sistema de microtubos análogo, en numerosos aspectos, a nuestro sistema circulatorio sanguíneo. Y sin embargo es así. Las plantas bombean con-

tinuamente enormes cantidades de agua del suelo a las hojas y de allí a la atmósfera. Globalmente, los vegetales devuelven a la atmósfera más de la mitad de los 110.000 kilómetros cúbicos de agua que caen sobre los continentes cada año en forma de precipitación. Dependiendo de

las condiciones ambientales, un solo árbol puede llegar a transpirar cientos de litros de agua en un día, cantidad equiparable al consumo de agua potable de un habitante de una ciudad como Barcelona (200 litros por día).

¿A qué se deben los elevados requerimientos hídricos de los árboles? Del agua que las plantas absorben por las raíces, una fracción muy reducida es utilizada directamente en su metabolismo; la mayor parte circula por su interior y, después de evaporarse, regresa a la atmósfera. Cabe preguntarse por qué se produce este dispendio. Por un lado, el agua constituye el medio por el que los nutrientes obtenidos del suelo son transportados hasta los tejidos fotosintéticos de las hojas. Allí, las moléculas inorgánicas de dióxido de carbono (CO_2) son transformadas, mediante la energía solar, en compuestos orgánicos



CORTE TRANSVERSAL de madera de la especie *Prunus sargentii*, en la que se observan los conductos que transportan el agua en el xilema. La micrografía electrónica permite distinguir los vasos funcionales (azul), llenos de agua, de los embolizados (negro), llenos de aire.